

经验公式简便求法典型实例

毛 宁¹, 张尧亮²

(1. 南京水利科学研究院, 南京 210024; 2. 江苏天地钢结构工程集团有限公司, 江苏 徐州 221004)

摘 要: 介绍了试验研究资料绘在有关函数的坐标纸上仍然不是直线关系的找经验公式简便方法。作为实例, 选择了水力学和土力学中常用的关系曲线, 分别是点绘在双对数、半对数和普通方格纸上的。借该 3 例典型曲线叙述了求经验公式的简便方法过程, 并求得相应曲线的球体潜水运动阻力系数公式、泥沙沉降速度公式、软土地基沉降固结度公式和给水度公式。

关 键 词: 经验公式; 关系曲线; 阻力系数; 固结度; 给水度

中图分类号: TB 115

文献标识码: A

Typical examples of simple methods to find empirical formulas

MAO Ning, ZHANG Yao-liang

(1. Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing 210024, China; 2. Jiangsu Tiandi Steel Structure Co. Ltd, Xuzhou, Jiangsu 221004, China)

Abstract: The simple method to find empirical formula of the experimental and researched data which plotted on the coordinate paper of related function is not a straight line is described. As examples the relation curves plotted on log-paper semi-log paper and ordinary coordinate paper in hydraulics and soil mechanics are selected. With these typical curves the procedure of simple method to find empirical formula is expounded. Consequently the formulas of drag coefficient for immersed sphere body moving through water, settling velocity for silt and sand, settlement consolidation degree for soft foundation and specific yield are obtained.

Key words: empirical formula; relativity curve; drag coefficient; degree of consolidation; specific yield

1 前 言

在试验研究成果中有很多关系曲线供查用, 如果能把它们提炼成经验公式就能确切方便地引用。找经验公式的简便方法是把资料点绘适用于曲线类型(直线、抛物线、双曲线等)的有关坐标纸上, 例如, 一般的方格纸、对数纸、半对数纸等, 形成直线, 就可直接写其方程式的经验公式。但有时点绘到各种函数的坐标纸上仍然是一条曲线, 不能直接写出其直线关系式 $y = a + bx$, 注意此式中的变量 x 、 y 可以是任意函数。此时就需要把它转换成直线, 再确定式中的常数 a 和 b , 或者转换坐标以及拟合曲线等措施。下面就选择水力学、土力学中常用的阻力系数、给水度、固结度等参数求出经验公式便于引用, 同时也介绍此类曲线的求经验公式通则。

2 水中球体运动的阻力系数经验公式

图 1 为试验资料点绘的曲线, 在水力学和流体

力学中, 如罗斯的两本经典著作(Rouse, 1938 年, 1946 年)^[1], 都详细讨论了阻力系数 C_D 与雷诺数 Re 的关系曲线, 包括有各家学者在水槽、水洞、风洞中用各种材料的球形、圆盘等做试验的成果, 测定阻力 F 和流速 V 即可由式(1)计算阻力系数 C_D 。

$$F = C_D A \frac{\rho v^2}{2} \quad (1)$$

式中: A 为物体的迎水投影面积, 对于球体,

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \quad (D \text{ 为直径})。$$

现在就按照图中的球体(spheres)试验曲线求其公式。

流体力学中都把 C_D-Re 曲线划分为 3 段, 即上段直线的层流区、下段水平线的紊流区和中间段曲线的过渡区。层流区直线段恰好符合 Stokes 理论公式, 即 $C_D = 24/Re$; 紊流区 C_D 为常数, 只有过渡区, 尚未见拟合该曲线的公式, 遇到此类问题, 如研究泥沙运动在水中的下沉速度, 仍是查曲线或表格,

似有不便,也不协调,因此,为阻力系数实验公式的完整性,补充求出过渡区的经验公式,方法过程为:对数纸上只要画成直线就很容易求出抛物线型和指数方程的经验公式 $y = ax^b$ 。对于对数纸上的曲线则可加减一个常数,绘成对数纸上的直线,再求得经验公式:

$$y = ax^b + c \quad (2)$$

式(2)取对数即可得到对数坐标纸上的直线方程:

$$\lg(y - c) = \lg a + b \lg x \quad (3)$$

此种作法的成功是由于同一常数在对数纸上的距离是不等的,实际点绘时,试取 2~3 个常数即可得出满意的直线,如图 1 中的 AB 线,取了常数 $c = -0.35$,即说明 AB 直线方程的纵坐标 $y = 0.35$ 。或者按照下式更确切计算 c 值为

$$c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3} \quad (4)$$

式中: (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 为曲线上靠近两端任选的两点,再选第 3 点为 $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$ 时,可在曲线上查出相应的 y_3 值。对照图 1 的坐标, $x = Re$, $y = C_D$, 则选曲线上两点 $x_1 = 1$, $y_1 = 25$; $x_2 = 1\,000$, $y_2 = 0.46$ 。计算 $x_3 = \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{1 \times 1\,000} = 31.62$, 并在曲线上查出相应 $y_3 = 2$, 代入式(4), 算得 $c = 0.35$, 则式(3)为

$$\lg(y - 0.35) = \lg a + b \lg x \quad (5)$$

关于式(4)的引用证明很简单。因为在曲线上的两点(由式(2))分别是 $y_1 - c = ax_1^b$, $y_2 - c = ax_2^b$, $y_3 - c = ax_3^b$, 且因 $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$, 则有 $ax_3 = \sqrt{ax_1^b ax_2^b}$ 或 $y_3 - c = \sqrt{(y_1 - c)(y_2 - c)}$, 解出 c 值, 即式(4)。

把所选曲线上的两点 $x_1 = 1$, $y_1 = 25$; $x_2 = 1\,000$, $y_2 = 0.46$ 代入式(5)解联立方程式。即可求得 $a = 24.66$, $b = -0.784$ 。这里提醒注意, 如果试验的点子分散, 还可将众多点子代入式(5)求 a 、 b 的平均值, 或用最小二乘法求精确的 a 、 b 值, 求得相当式(2)的方程 $y = 24.66x^{-0.784} + 0.35$, 也就是图 1 中直线 AB 的 y 值加上 c 值, 即曲线的 y 值。写成 C_D 与 Re 的关系, 即其经验公式为

$$C_D = \frac{24.66}{Re^{0.784}} + 0.35 \quad (6)$$

式(6)过渡区或称介流区的适用范围可取 $1 < Re < 2\,000$ 。关于层流区公式 $C_D = 24/Re$ 的适用范

围可取 $Re < 1$; 紊流区阻力可取常数 $C_D = 0.44$, 适用范围 $Re > 2\,000$ 。这样就补充完整了球体在水中运动的阻力系数公式。

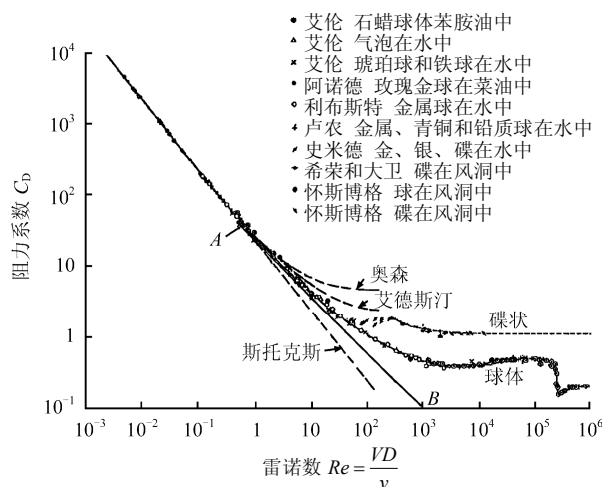


图 1 阻力系数与雷诺数关系曲线

Fig.1 Relation curves of drag coefficient and reynolds number

同样, 在泥沙运动学中引用此球体阻力系数于水中的泥沙沉降速度问题时, 也可以补充此过渡区公式的缺陷, 例如, 按照球体下沉阻力公式(1),

$$F = C_D \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) \frac{\rho V^2}{2} \text{ 与球体潜水重 } \frac{\pi D^3}{6} (\gamma_s - \gamma_w)$$

(其中 γ_s 为颗粒重度; γ_w 为水的重度) 相等关系就可推求出以下公式。式中的沉速 w 就相当于雷诺数 $Re = \frac{VD}{v}$ 中的流速 V , 各流态区公式的适用范围

同上。而且, 由适用范围也可推知各流态的泥沙特征, 例如, 下面层流区沉速公式, 在 $Re < 1$ 适用范围限制内, 粒径约为 $D < 0.1 \text{ mm}$ 的泥沙, 层流区即 Stokes 公式, $C_D = 24/Re$:

$$w = \frac{gD^2}{18\nu} \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) \quad (7)$$

式中: ν 为水运动黏滞性系数。

紊流区 ($C_D = 0.44$):

$$w = \left[3gD \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) \right]^{1/2} \quad (8)$$

过渡区或介流区:

$$C_D = \frac{24.66}{\left(\frac{wD}{\nu} \right)^{0.784}} + 0.35 \quad (9)$$

以上公式尺度和谐, 取单位一致即可。阻力系数 C_D 是指球体直径 D 的泥沙, 若非球体则在非层流区成片状时, 按照图 1 的试验资料 C_D 应加倍。

3 土力学中沉降固结的经验公式

图 2 为太沙基的两本土力学 (Terzaghi, 1943 年, 1948 年) [2] 中的垂向沉降固结度 U 与时间因子 T_v 的关系曲线。太沙基曾推导出单向固结问题的理论解, 但为无穷级数, 甚为复杂, 因而把 3 种不同排水和固结压力的情况绘成曲线 C1、C2、和 C3, 并且又进行找经验公式, 在他的理论力学中有 2 页叙述, 只对其中曲线 C1 找出分段的经验公式, 即固结度 $U(\%) < 52.6$ 时为抛物线型公式, $U(\%) > 52.6$ 时为半对数的函数式。运用起来似不简便, 且曲线 C2 和 C3 也没有给出经验公式。从实用观点出发, 放弃曲线两端变化陡缓相差较大的精度追求的单一公式如下, 补充完整这 3 条曲线的经验公式。

此曲线接近抛物线, 可试求下面多项式方程:

$$y = a + bx + cx^2 \quad (10)$$

具体求法以中间曲线 C1 为例。先在曲线上任选一点 ($x_1=0.4$, $y_1=70$), 并将 y 坐标改换为 $\frac{y-y_1}{x-x_1}$, 再与 x 对应就画成一条直线, 此例即为直线方程:

$$\frac{y-70}{x-0.4} = a' + b'x \quad (11)$$

很明显, 式 (11) 乘出就是式 (10) 的形式。然后, 再选曲线上两点 $y_2=30$, $x_2=0.07$ 和 $y_3=90$, $x_3=0.85$, 代入上面直线方程联立求解常数 $a'=128.10$, $b'=-98.42$, 则式 (11) 乘出即得曲线 C1 的经验公式为式 (12), 这时, y 即 $U(\%)$, x 即 T_v 。

$$y = 18.76 + 167.47x - 98.42x^2 \quad (12)$$

同理, 图 2 中的曲线 C2, 选点 ($y_1=70$, $x_1=0.28$), ($y_2=40$, $x_2=0.047$), ($y_3=90$, $x_3=0.715$), 求得常数 $a'=134.58$, $b'=-123.92$ 经验公式为

$$y = 32.32 + 169.28x - 123.92x^2 \quad (13)$$

图 2 中的曲线 C3, 选点 ($y_1=70$, $x_1=0.497$), ($y_2=30$, $x_2=0.155$), ($y_3=90$, $x_3=0.925$), 求得常数 $a'=131.10$, $b'=-91.21$, 经验公式为

$$y = 4.84 + 176.43x - 91.21x^2 \quad (14)$$

以上 3 条曲线的经验公式写成固结度 $U(\%)$ 与时间因子 T_v 的关系, 则为

曲线 C1:

$$U\% = 18.76 + 167.47T_v - 98.42T_v^2 \quad (15)$$

曲线 C2:

$$U\% = 32.32 + 169.28T_v - 123.92T_v^2 \quad (16)$$

曲线 C3:

$$U\% = 4.84 + 176.43T_v - 91.21T_v^2 \quad (17)$$

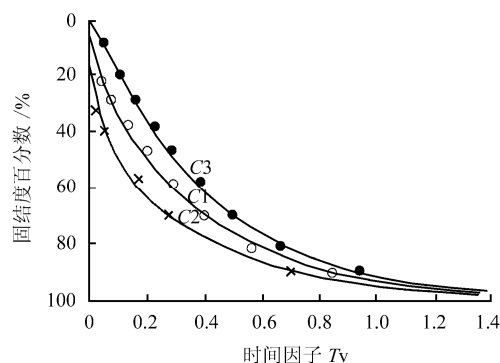


图 2 固结度与时间因子关系曲线
Fig.2 Relation curves of degree of consolidation and time factor

式(15)验算的各点, 绘在相应的曲线上, 计算点与曲线相差最大为 3%, 其适用 $U(\%)$ 的范围。曲线 C1 为 15%~90%, 曲线 C2 为 25%~90%, 曲线 C3 为 10%~90%。

引用上式计算软基沉降固结度时, 应注意 3 条曲线各代表不同的排水边界和垂向的固结压力分布。时间因子 T_v :

$$T_v = \frac{c_v t}{H^2} \quad (18)$$

式中: H 为软黏土的排水有效厚度; c_v 为固结系数; t 为加荷载后经过的时间。

曲线 C1 代表上下面自由排水, 相当底面是砂层, 时间因子式中的 H 是实有软土层厚度的 1/2。曲线 C2 代表软土层很厚, 底面不透水, 时间因子中的 H 即料有土层厚度。曲线 C3 代表不加荷载, 只是水力冲填土自重压缩沉降且底面不透水的情况。

4 渗流计算中的给水度经验公式

图 3 为给水度比与渗透系数 k 的试验资料点绘在半对数纸上的关系曲线, 包括砂砾松散土和黏性

土的室内试验资料。此曲线呈拉长的 S 型, 由极缓上升转为急速上升后又转缓上升渐趋于平。此类曲线在土力学和泥沙学中会遇到的。例如, 土力学中的土粒级配颗粒分曲线就是此型, 若能引用此法找其经验公式, 似可更便于引用和计算土料的特征粒径 d_{50} 、 d_{60} 、 d_{15} 、 d_{85} 等。下面就以图 3 为例介绍此类曲线的找经验公式过程。

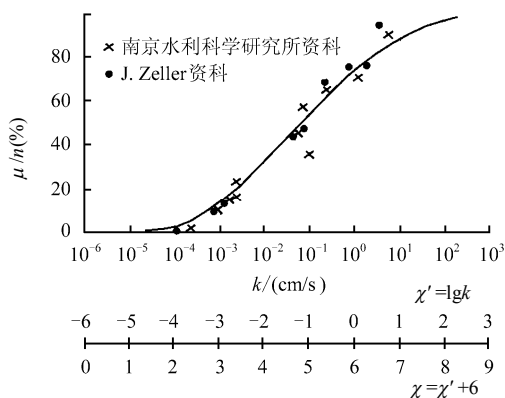


图3 给水度与渗透系数关系曲线
Fig.3 Relation curve of specific yield and coefficient of seepage

此类拉长 S 型曲线属于指数上指数的刚泊兹 (Gompertz) 方程, 即

$$y = ab^{c^{x/\delta}} \quad (19)$$

如果曲线不交于坐标原点, 或在 $x=0$ 处交在 y 轴上的值为 y_0 且值不是很小时, 则式 (19) 应为

$$y = y_0 + ab^{c^{x/\delta}} \quad (20)$$

确定式 (19) 中常数 a 、 b 、 c 的方法, 需按照独立变数 x 的等差级数 (差为 δ) 列表分成 3 组, 每组点子均为 m 个, 点子可沿着已会成的曲线按所欲的等差级数选取。从表中小值开始列出的 x , y 与 $\lg y$ 等栏计算出的 3 组中每一组资料 $\lg y$ 的和, 设为 S_1 、 S_2 及 S_3 。应注意, 对于不交在原点上的方程式 (15), $\lg y$ 应以 $\lg (y - y_0)$ 代换, 则式 (20) 中的 3 常数可用式 (21) 求得, 证明见文献[3]。

$$\left. \begin{aligned} c &= \left(\frac{S_2 - S_3}{S_1 - S_2} \right)^{1/m} \\ \lg a &= \frac{1}{m} \left(S_1 - \frac{S_1 - S_2}{1 - c^m} \right); \lg b = \frac{(S_1 - S_2)(1 - c)}{c(1 - c^m)^2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

现引用式 (21) 找图 3 所示曲线的经验公式。

虽然是绘在半对数纸上的, 但经过转换仍可套用式 (19) 的形式求其经验公式。如图 3 的横坐标 k 改为对数值, $\lg k$ 后 ($\lg 10=1$, $\lg 10^{-1}=-1$, ...) 就转换成等分的一般方格纸坐标 x' 。然后, 再平移原点位置转换为坐标 x ($x = x' + 6$), 此时就可套用式 (19) 确定 a 、 b 、 c 了。

依序选取横坐标 x 的差数 $\delta=1$, 在图 3 曲线上选点列表计算 (为避免 0 的对数, 从 $\lg k=-5$ 算起) 计算如下:

表1 计算结果
Table 1 Calculation

$x' = \lg k$	$\frac{x}{\delta} = x' + 6$	$y = \mu/n$ (%)	$\lg y = \lg \frac{\mu}{n}$	公式 (22) 计算
-6	0	0		0.01
-5	1	1	0	0.5
-4	2	2	0.301	4
-3	3	14	1.146	15
			1.447 = S_1	
-2	4	33	1.519	33
-1	5	53	1.724	54
0	6	74	1.869	73
			5.112 = S_2	
1	7	89	1.949	87
2	8	96	1.982	96
3	9	100	2	102
			5.931 = S_3	

由表 1 列 $\lg y$ 3 组资料每一组的和代入式 (21), 计算 3 个常数为 $c^m = c^3 = \frac{5.112 - 5.931}{1.447 - 5.112} = 0.223$,

$$c = (0.223)^{1/3} = 0.607, \quad 1 - c = 0.393, \quad 1 - c_3 = 0.777$$

$$\lg a = \frac{1}{3} \left(1.447 - \frac{1.447 - 5.112}{0.777} \right) = 2.056, \quad a = 113.7,$$

$$\lg b = \frac{(1.447 - 5.112)(0.393)}{0.607(0.777)^2} = -3.93, \quad b = 0.0001175.$$

代入式 (19) 可得 $y = 113.7(0.0001175)^{0.607^{x/\delta}}$ 。因 $y = \mu/n$ (μ 为给水度; n 为孔隙率), $x/\delta = 6 + x' = 6 + \lg k$, 故得

$$\frac{\mu}{n} = 113.7(0.0001175)^{0.607(6 + \lg k)} \quad (22)$$

或用对数式表示:

$$\lg \frac{\mu}{n} = 2.056 - 3.93(0.607)^{(6 + \lg k)} \quad (23)$$

式中: 渗透系数 k 的单位为 cm/s , 计算出的结果是百分数, 在表 1 列最右一栏公式计算结果与表中间栏所取曲线上的值比较, 可知求得公式的精度较高。例如: 已知某中细砂 $d_{50} = 0.2 \text{ mm}$, 干重度 $\gamma_d = 1.49$

g/cm^3 , 渗透系数 $k = 1.7 \times 10^{-3} \text{ cm/s}$, 求 μ 值。将 k 值代入式 (22) 或式 (23) 算得 $\mu/n = 18.72\%$, 因为干重度与孔隙率 n 和土粒重 γ_g 的关系为 $\gamma_d = \gamma_g (1-n)$, 一般 $\gamma_g = 2.65 \text{ g/cm}^3$, 故可算得 $n = 0.438$, 则得给水度 $\mu = 0.1872 \times 0.438 = 0.082$ 。

所举 3 例典型曲线求公式的法则可归纳如下。

①对数值上的曲线 (图 1): 靠曲线两端任选两点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 再选第 3 点为 $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$ 及其对应的 y_3 , 代入式 (4) 得出 c 值, 再代入式 (3)。然后, 把任选的两点坐标值代入式 (3) 求解常数 a 、 b , 即得出欲求的经验式 (2)。

②普通坐标纸上的近似抛物线 (图 2): 在曲线上任选一点 (x_1, y_1) , 将坐标改换成 $\frac{y-y_1}{x-x_1}$, 再与

x 对应化成一条直线的方程 $\frac{y-y_1}{x-x_1} = a' + b'x$, 然后

再选曲线上两点 (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , 代入直线方程求解常数 a' , b' , 即得出欲求的经验式 (10)。

③半对数纸上的拉长 S 型曲线 (图 3): 按照 x 的等差级数 (差为 δ) 沿曲线选点分为 3 组, 各组分点有 m 个, 列表算出每组资料 $\lg y$ 的和 S_1 、 S_2 、 S_3 , 代入式 (16), 求解常数 a , b , c , 即得出欲求的经验式 (14)。

5 结 语

在阅读水力学、土力学、泥沙运动学等时, 感到常用的一些试验资料关系曲线, 需要找出经验公式更有利于引用传播和发展。因此, 选出常用的 3 种曲线, 并且是在分析资料常用的对数纸、半对数纸、普通方格纸上所绘绘制的曲线。这样便于利用它们说明找经验公式的相应方法过程。同时给出了水力学中的球体潜水运动阻力系数公式 (16) 和泥沙沉降速度公式 (7)~(9), 土力学中的沉降固结度公式 (15)~(17) 和渗流力学中的给水度公式 (22)。

在坐标纸上画曲线求经验公式, 不需要高深数学, 是最简便的方法, 所举的 3 例在试验研究中常遇到带有普遍性的, 尤其是拉长的 S 型曲线, 完全类同正规分布的土粒级配颗粒曲线, 如能以公式取代, 可为引用特征粒径和滤层的设计提供方便。

参 考 文 献

- [1] HUNTER ROUSE. Fluid mechanics for hydraulic engineers[M]. [S. l.]: Dover Publisher, 1961.
- [2] TERZAGHI K. Theoretical soil mechanics[M]. New York: Wiley, 1943.
- [3] 毛昶熙. 电模拟试验与渗流研究[M]. 北京: 水利出版社, 1985.

宏微观岩土力学与岩土技术国际研讨会二号通知

宏微观岩土力学与岩土技术国际研讨会(International Symposium on Geomechanics and Geotechnics: From Micro to Macro, 简称 IS-Shanghai 2010)将于 2010 年 10 月 10 日至 12 日在上海同济大学举行。该会议由国际土力学与岩土工程协会(ISSMGE) TC35 委员会 (现为 TC105 委员会) 和中国土木工程学会土力学及岩土工程分会联合主办, 由同济大学和日本山口大学联合承办, 由国家自然科学基金委和光华同济大学土木工程学院基金资助, 旨在对宏微观岩土力学与岩土技术进行国际交流研讨, 探讨土的宏微观特性、离散单元法数值模拟、岩土工程应用技术的最新国际研究成果与发展趋势。会议特邀英国剑桥大学 Malcom Bolton 教授、荷兰特文特大学 Stefan Luding 教授、日本山口大学 Masayuki Hyodo 教授等著名专家学者做专题学术报告。截至目前, 共收到 400 余份摘要投稿和 220 余篇全文投稿, 经过同行评审, 遴选优秀论文将刊印在国际 SCI 源期刊 Granular Matter 和 Géotechnique 的 special issue, 以及国际英文期刊 Frontier of Architecture and Civil Engineering in China, 其余会议论文将由国外著名出版商 CRC Press - Taylor & Francis Group 出版正式论文集, 论文集将送呈 EI 和 ISI 检索数据库。

会议届时有来自美国、英国、日本、加拿大、澳大利亚、西班牙、韩国等十余个国家和地区的知名学者参会, 预计与会人员 100 余人。目前会议网上注册系统已开通, 会议详情敬请关注会议网站。本次研讨会将是岩土力学和岩土工程研究工作者交流经验和探讨发展方向的平台, 组委会诚挚邀请各方同仁共赴盛会, 并欢迎各方展商现场参展。

主办单位: 国际土力学与岩土工程学会 TC35 分会 中国土木工程学会土力学及岩土工程分会

承办单位: 同济大学 山口大学 (日本) **资助单位:** 国家自然科学基金

会议主题: (1) 土体宏微观力学特性的最新进展; (2) 描述岩土、岩石、粘结材料宏观发展的新试验新技术; (3) 利用离散单元法模拟土体特性的新发展、新技术; (4) 离散元、有限元在岩土工程中的应用的最新发展趋势; (5) 离散元、有限元在与岩土工程相关领域如隧道、水利、道路等的发展与应用。

会议国际顾问委员会主席: 英国剑桥大学 Malcom Bolton 教授

会议国际学术委员会主席: 同济大学蒋明镜教授 **会议组织委员会主席:** 同济大学李永胜校长/教授

会议时间: 2010 年 10 月 10 日-12 日 **会场地点:** 上海同济大学四平路校区中法中心

会议网址: <http://geotec.tongji.edu.cn/is-shanghai2010/> **联系方式:** 联系人: 蒋明镜教授 刘芳博士

地址: 上海市四平路 1239 号同济大学地下建筑与工程系 (邮编: 200092) 手机: 13761404246 电话: 21-65983142 传真: 21-65985210 E-mail: mingjing.jiang@mail.tongji.edu.cn isshanghai2010@gmail.com

(IS-Shanghai2010 组委会供稿)